MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DES ŒUVRES UNIVERSITAIRES **(DGES)**

DIRECTION DE l'ORIENTATION ET DES EXAMENS **(DOREX)**

REPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
Union - Discipline - Travail

Institut National Polytechnique
Félix Houphouët – Boigny
SERVICE DES CONCOURS

Concours AMCPEsession 2014

Composition : <u>Mathématiques 6</u> (statistiques, probabilités)

Durée : 2 Heures

Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Les exercices sont indépendants

<u>Exercice 1:</u> Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1. Un pion se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, le pion est sur le sommet.
- Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres côtés, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le pion à l'instant n. Par hypothèse, on a donc $X_0 = 1$.

1) a) Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 2) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 3) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 4)$$

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{3}$.

c) Donner alors, pour tout n de $\mathbb{N}$, la valeur de $\mathbb{P}(X_n = 1)$.

2) En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

On **admettra** que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}(X_n = 3) = \mathbb{P}(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

3) Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X_n .

<u>Exercice 2:</u> On donne la distribution statistique suivante :

Classes	20–30	30–40	40 – **x**	**x** –70	70–100	100 – **y**
Effectifs	100	140	125	200	180	55

1) Sachant que la médiane de cette distribution est égale à 56,8 calculer **x** .

2) La moyenne arithmétique de la population étudiée est égale à 60,5.
Calculer **y** la <u>borne supérieure de la dernière classe</u> .

Exercice 3: Si Π est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, on donne les valeurs approchées suivantes : $\Pi(1,96) \cong 0,975$ et $\Pi(0,90) \cong 0,816$.

1) a) Montrer que pour tout entier $k \geq 3$, l'intégrale $A_k = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^k}\, dt$ est convergente.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $A_k = \frac{1}{(k-1)^2}$.

2) a) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} \frac{16 \ln t}{t^5} & , \text{si } t > 1 \\ 0 & , \text{si } t \leq 1 \end{cases}$, définit une densité de variable aléatoire X.

b) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance mathématique, et la calculer.

c) Montrer que la variable aléatoire X admet une variance, et la calculer.

3) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi définie par la densité f. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la variable aléatoire $Y_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$.

On admettra que Y_n suit la loi normale de moyenne $\mathbb{E}(X_1)$ et de variance $\frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n}$, pour n suffisamment grand $(n \geq 30)$.

a) Calculer une valeur approchée de valeur $\mathbb{P}\left(\left|Y_{68} - \frac{16}{9}\right| \leq 0,1\right)$.

b) Evaluer un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ on ait : $\mathbb{P}\left(\left|Y_n - \frac{16}{9}\right| \leq 0,1\right) \geq 0,95$.